



SB-0617

First Year B. Sc./B.A. Examination

March / April - 2011

Mathematics : Paper - II

(Calculus & Differential Equations)

(New Course)

Time : 3 Hours]

[Total Marks : 105

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of signs on your answer book.

Name of the Examination :
F. Y. B. SC./B.A.

Name of the Subject :
MATHEMATICS - 2 (NEW)

Subject Code No. : 0 6 1 7 Section No. (1, 2,.....): NIL

Seat No. :

Student's Signature

- (૨) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
(૩) જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.
(૪) પ્રચલિત સંકેતોને અનુસરો.

૧ નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

૧૫

(૧) જો $y = \frac{x}{ax+b}$ હોય તો y_n શોધો.

(૨) વિધેય $f(x) = (x-1)^{2/3}$; $x \in [0, 2]$ માટે રોલનું પ્રમેય ચકાસો.

(૩) વક્ર $y = \sin x$ ની વક્રતા $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ શોધો.

(૪) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^5}$ ની કિંમત શોધો.

(૫) વિકલ સમીકરણ $\int \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x$ ની કક્ષા તથા પરિમાણ શોધો.

(૬) ઉકેલો : $(1+x)^2 \frac{dy}{dx} = 1+y^2$

(૭) જો $Z = x^2 + 2xy + y^2$ હોય તો $\frac{\partial Z}{\partial x}$ અને $\frac{\partial Z}{\partial y}$ મેળવો.

(૮) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^x$ ની કિંમત મેળવો.

(૯) વિકલ સમીકરણ $\frac{dx}{dy} + P'y = Q'$ જ્યાં P', Q' y નાં વિધેયો છે - નો

સમાન્ય ઉકેલ લખો.

(૧૦) ઉકેલો : $y^2 \cdot p^2 = x^2$

૨ (અ) જો $y = e^{ax} \cdot \cos(bx+c)$ હોય તો y_n મેળવો તથા ૬

$y = e^x \cos 5x \cdot \cos 3x$ માટે y_n શોધો.

(બ) જો $y = \sin^{-1} x; |x| \leq 1$ હોય તો સાબિત કરો કે ૬

$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$

(ક) જો $y = \frac{2x+1}{(x-1)(2x-1)}$; હોય તો y_n મેળવો. ૬

અથવા

૨ (અ) જો $y = \frac{1}{(ax+b)}$; $x, a, b \in R, ax+b \neq 0$ હોય તો y_n મેળવો. તે પરથી ૬

$y = \log(ax+b); ax+b > 0$ માટે y_n શોધો.

(બ) જો $y = \sin^2 x \cos^4 x$ હોય તો y_n શોધો. ૬

(ક) જો $y = \frac{3x+1}{(x+1)^2(x-2)}$ હોય તો y_n મેળવો. ૬

૩ (અ) રોલનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો તથા તેનું ભૌમિતિક અર્થઘટન સમજાવો. ૬

(બ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ ની કિંમત શોધો. ૬

(ક) લાગ્રાન્જના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે ૬

$$\frac{b^b}{a^a} = (e \cdot \lambda)^{b-a}; \text{ જ્યાં } 0 < a < \lambda < b.$$

અથવા

૩ (અ) કોશીનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૬

(બ) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\tan 3x}$ ની કિંમત મેળવો. ૬

(ક) સાબિત કરો કે : $\sqrt{100} - \sqrt{99}$ ની કિંમત $\frac{1}{18}$ અને $\frac{1}{20}$ ની વચ્ચે છે. ૬

૪ (અ) કોઈ પણ વક્ર $y = f(x)$ માટે વક્રતા ત્રિજ્યા $\left| \frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y_2} \right|$ છે એમ ૬

$$\text{સાબિત કરો, જ્યાં } y_1 = \frac{dy}{dx}; y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

(બ) વક્ર $x = (y-1) \cdot (y-2) \cdot (y-3)$ ના વક્રતા પરિવૃત્તિય બિંદુઓના યામ મેળવો. ૬

(ક) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ મેળવો. તે પરથી $\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x dx$ મેળવો. ૬

અથવા

૪ (અ) $\int \sec^n x dx$ નું લઘુકરણ સૂત્ર મેળવો અને તે પરથી $\int \sec^5 x dx$ ની કિંમત શોધો. ૬

(બ) વક્ર $r^m = a^m \cdot \sin m\theta$ માટે સાબિત કરો કે $\rho = \frac{a^m}{(m+1)r^{m-1}}$ ૬

(ક) વક્ર $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x-1}$ માટે અનંત સ્પર્શકો શોધો.

૫ (અ) વિકલ સમીકરણ $(ax+by+c)dx+(a'x+b'y+c')dy=0$ ને ઉકેલવાની રીત વર્ણવો. ૬

(બ) ઉકેલો : $\cos x \frac{dy}{dx} - y \cdot \sin x + y^2 = 0$ ૬

(ક) ઉકેલો : $(1+x) \frac{dy}{dx} + (1+2x)y = (1+x)^2$ ૬

અથવા

૫ (અ) સુરેખ વિકલ સમીકરણની વ્યાખ્યા આપી તેને ઉકેલવાની રીત દર્શાવો. ૬

(બ) ઉકેલો : $x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{y^2 + x^2}$ ૬

(ક) ઉકેલો : $(2xy + y - \tan y)dx + (x^2 - x \tan^2 y + \sec^2 y)dy = 0$ ૬

૬ (અ) વિકલ સમીકરણ $f(x, y, p) = 0$, જો y માટે ઉકેલનીય હોય તો તેને ઉકેલવાની રીત સમજાવો. ૬

(બ) ઉકેલો : $xp^2 + (y-x)p - y = 0$ ૬

(ક) ઉકેલો : $y = 2px + y^2 \cdot p^3$ ૬

અથવા

૬ (અ) ફ્લોરોનું વિકલ સમીકરણ લખો અને તેને ઉકેલવાની રીત સમજાવો. તે પરથી $(y-xp)(p-1) = p$ નો સામાન્ય ઉકેલ લખો. ૬

(બ) ઉકેલો : $x = \frac{1}{p} + p$ ૬

(ક) ઉકેલો : $(px-y) \cdot (py+x) = h^2 \cdot p$ ૬

ENGLISH VERSION

- Instructions :**
- (1) As per the instructions no. 1 of page no. 1.
 - (2) Answer all questions.
 - (3) Figures to the right indicate marks of the question.
 - (4) Follow the usual notations.

1 Answer the following questions : **15**

(1) If $y = \frac{x}{ax+b}$ then find y_n .

(2) Verify Rolle's theorem for the function

$$f(x) = (x-1)^{2/3}; x \in [0, 2].$$

(3) Obtain Curvature of the curve $y = \sin x$ at $x = \frac{\pi}{2}$.

(4) Find the value of $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^5}$

(5) Find order and degree of the differential equation :

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x$$

(6) Solve : $(1+x)^2 \frac{dy}{dx} = 1+y^2$

(7) If $Z = x^2 + 2xy + y^2$ then find $\frac{\partial z}{\partial x}$ and $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(8) Evaluate : $\lim_{x \rightarrow \infty} x^x$

(9) Write the general solution of differential equation

$$\frac{dx}{dy} + P'x = Q', \text{ where } P' \text{ and } Q' \text{ are functions of } y.$$

(10) Solve : $y^2 \cdot p^2 = x^2$

- 2 (a) Obtain y_n for $y = e^{ax} \cdot \cos(bx+c)$. And find y_n for $y = e^x \cos 5x \cdot \cos 3x$ 6
- (b) If $y = \sin^{-1} x; |x| \leq 1$ then prove that $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$ 6
- (c) Obtain : y_n for $y = \frac{2x+1}{(x-1)(2x-1)}$ 6

OR

- 2 (a) Obtain y_n for $y = \frac{1}{(ax+b)}$; $x, a, b \in R, ax+b \neq 0$. From that find y_n for $y = \log(ax+b); ax+b > 0$. 6
- (b) Find y_n for $y = \sin^2 x \cos^4 x$. 6
- (c) Obtain y_n for $y = \frac{3x+1}{(x+1)^2(x-2)}$ 6
- 3 (a) State and prove Rolle's theorem and explain its geometrical interpretation. 6
- (b) Evaluate : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$. 6
- (c) Use Lagrange's theorem to prove that $\frac{b^b}{a^a} = (e \cdot \lambda)^{b-a}$; where $0 < a < \lambda < b$. 6

OR

- 3 (a) State and prove Cauchy Theorem. 6
- (b) Evaluate : $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\tan 3x}$. 6
- (c) Prove that the value of $\sqrt{100} - \sqrt{99}$ lies between $\frac{1}{18}$ and $\frac{1}{20}$. 6

- 4 (a) Prove that for any curve $y = f(x)$ radius of 6

curvature is $\left| \frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y_2} \right|$, where $y_1 = \frac{dy}{dx}$; $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$

- (b) Find the point of inflexion for the curve 6
 $x = (y-1) \cdot (y-2) \cdot (y-3)$.

- (c) Obtain $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ and hence evaluate $\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x dx$. 6

OR

- 4 (a) Obtain the reduction formula for $\int \sec^n x dx$ and hence 6
 evaluate $\int \sec^5 x dx$.

- (b) For the curve $r^m = a^m \cdot \sin m\theta$, prove that 6

$$\rho = \frac{a^m}{(m+1)r^{m-1}}$$

- (c) Find asymptotes for the curve $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x-1}$. 6

- 5 (a) Explain the method to solve the differential 6
 equation : $(ax+by+c) dx + (a'x+b'y+c') dy = 0$

- (b) Solve : $\cos x \frac{dy}{dx} - y \cdot \sin x + y^2 = 0$ 6

- (c) Solve : $(1+x) \frac{dy}{dx} + (1+2x)y = (1+x)^2$ 6

OR

- 5 (a) Define linear differential equation and explain the 6
 method to solve it.

- (b) Solve : $x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{y^2 + x^2}$ 6

- (c) Solve : $(2xy + y - \tan y) dx + (x^2 - x \tan^2 y + \sec^2 y) dy = 0$ 6

- 6 (a) Explain the method to obtain general solution for the differential equation $f(x, y, p) = 0$ which is solvable for y . 6
- (b) Solve : $xp^2 + (y-x)p - y = 0$ 6
- (c) Solve : $y = 2px + y^2 \cdot p^3$ 6

OR

- 6 (a) State and explain the method to solve Clairaut's differential equation and hence write the general solution of $(y - xp)(p - 1) = p$ 6
- (b) Solve : $x = \frac{1}{p} + p$ 6
- (c) Solve : $(px - y) \cdot (py + x) = h^2 \cdot p$ 6
-